

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

Halmazok

A halmaz, a halmaz eleme

A matematikában a *halmaz* és a *halmaz eleme* alapfogalom, ezért nem definiáljuk. Adott „dolgok” összességét akkor tekintjük halmaznak, ha egyértelműen eldönthető róluk, hogy hozzátartoznak-e az adott halmazhoz, vagy sem. Ha egy „dologra” áll a halmazt definiáló tulajdonság, akkor azt mondjuk, hogy az a halmaz eleme. Egy halmazban minden eleme pontosan egyszer szerepel.

A halmazokat általában nagybetűvel jelöljük pl. A, B, H, \dots . A halmaz elemének jele: \in , ha valami nem eleme az adott halmaznak, azt általában így jelöljük: \notin . Például: $a \in A$, $b \notin B$ esetleg $C \ni c$.

Halmazok megadása

► Felsorolással: kapcsos zárójelben az elemeket pontosvesszővel elválasztva (a felsorolások különböző sorrendje nem ad különböző halmazt), például: $A = \{1; 3; 5; 6\}$, $B = \{3; 6; 9; \dots; 300\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$.

► A halmazt definiáló tulajdonság megadásával, amely történet szövegesen, például: $B = \{10\text{-nél kisebb pozitív páros számok}\}$, vagy szimbólumokkal, például:

$$B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 10, 2 \mid x\}, \text{ vagy } B = \{x = 2k \mid k \in \mathbb{Z}^+, x < 10\}.$$

Nevezetes számhalmazok

Néhány nevezetes számhalmaznak egyezményes jelölése van:

► \mathbb{N} : természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$,

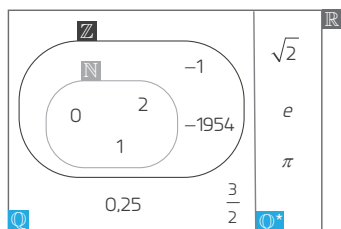
► \mathbb{Z} : egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$,

► \mathbb{Q} : racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$, azaz azon számok halmaza,

melyek felírhatók két egész szám hányadosaként, ahol a nevező nem nulla. (Másképp \mathbb{Q} azon számok halmaza, amelyek tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos.),

► \mathbb{Q}^* (vagy I): irracionális számok halmaza: azon számok halmaza, melyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. (Másképpen \mathbb{Q}^* azon számok halmaza, melyek tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos.),

► \mathbb{R} : valós számok halmaza ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$).



A nevezetes számhalmazok szemléltetése néhány elemükkel

Ezekből képezhető több, gyakran használt jelölés is, például:

- ▶ \mathbb{Z}^+ : a pozitív egész számok halmaza
- ▶ \mathbb{R}_0^- : a nem pozitív valós számok halmaza

Véges és végtelen halmazok, halmazok számossága

Definíció: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, *üreshalmaznak* nevezzük. Jele: \emptyset vagy $\{\}$.

Definíció: Ha egy halmaznak véges sok eleme van (tehát elemeinek száma egy természetes számmal megadható), akkor *véges halmaznak* nevezzük.

Definíció: Ha egy halmaz elemeinek a száma nem adható meg egy természetes számmal, akkor azt a halmazt *végtelen halmaznak* nevezzük.

Definíció: Egy véges halmaz elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük. Az A halmaz számosságát $|A|$ jelöli.

Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 7\}$ halmaz véges, és $|A| = 8$; a $B = \mathbb{R}^+$ halmaz végtelen.

Feladat (I.): Az alábbiak közül válassza ki azon halmazok betűjelét, melyek az üres halmazt adják meg! (2 pont)

$$A = \{2\text{-nél nagyobb, páros prímekek}\}$$

$$B = \{\emptyset\}$$

$$C = \{\text{az } x^2 - 10x + 26 = 0 \text{ egyenlet valós megoldásai}\}$$

$$D = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a \leq 1\}$$

$$E = \{\}$$

✓ **Megoldás:**

A, C, E

Ha csak két helyes választ jelöl meg, 1 pontot kap. Ha helytelen választ is megjelöl, nem kap pontot.

2 pont

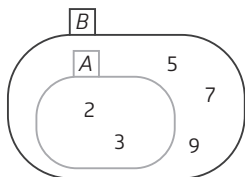
Halmazok közötti relációk

Definíció: Két halmaz *egyenlő*, ha ugyanazok az elemeik.

Példa: Az $A = \{2; 3; 5; 7\}$ és $B = \{\text{egyjegyű pozitív prímekek}\}$ halmazok esetén $A = B$.

Definíció: Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is. Jele: \subseteq .

Példa: Ha $A = \{2; 3\}$ és $B = \{2; 3; 5; 7; 9\}$, akkor $A \subseteq B$.



Definíció: Egy A halmaz *valódi részhalmaza* B -nek, ha A részhalmaza B -nek, de B -nek van olyan eleme, mely nem eleme A -nak. Jele: \subset .

Példa: Ha $A = \{2; 4\}$ és $B = \{2; 4; 5\}$, akkor $A \subset B$.

A részhalmaz fogalmából adódó legfontosabb tulajdonságokat az alábbi tételek foglalják össze.

Tétel:

- ▶ Bármely halmaz részhalmaza önmagának, $A \subseteq A$.
- ▶ Bármely halmaznak részhalmaza az üres halmaz, $\emptyset \subseteq A$.
- ▶ Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.
- ▶ Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.
- ▶ Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

Tétel: Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Feladat (II./A): Az alábbi halmazok közül némelynek valamely valódi részhalmaza is szerepel a felsoroltak között. Adja meg az alábbi halmazok között fennálló összes valódi részhalmaz-viszonyt! (5 pont)

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \mid x \text{ és } x > 3\}$$

$$B = \{\text{egyjegyű prímszámok}\}$$

$$C = \{5\}$$

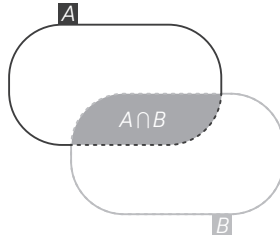
$$D = \{1; 2; \dots; 10\}$$

✓ **Megoldás:**

| | |
|---|---------------|
| Ábrázoljuk a halmazokat Venn-diagrammon! | 1 pont |
| <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> | |
| Ekkor látható, hogy $B \subset D$, $C \subset D$, $C \subset B$, $C \subset A$. | 4 pont |
| <i>Kapcsolatonként 1-1 pont jár. Ha részhalmaz-jelet használ, maximális pontot kap.</i> | |
| Összesen: | 5 pont |

Műveletek halmazokkal

Definíció: Az A és B halmazok *metszete* (vagy közös része) azoknak és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az A és B halmaznak is elemei. Jelölése: $A \cap B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \cap B = \{2; 3\}$.

Definíció: Két halmaz *diszjunkt* (vagy idegen), ha metszetük az üres halmaz.

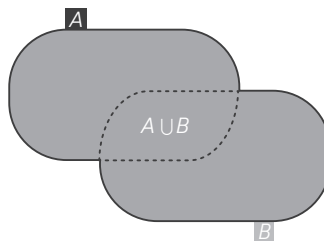
Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \mid x\}$ és a $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid 2k + 1\}$ halmazok diszjunktak.

A metszet művelet legfontosabb tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges A , B és C halmazokra:

- ▶ $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- ▶ $A \cap A = A$,
- ▶ $A \cap B = B \cap A$ (a metszet művelet kommutatív),
- ▶ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (a metszet művelet asszociatív).

Definíció: Az A és B halmazok *uniója* (vagy *egyesítése*) azoknak és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A -nak vagy B -nek elemei. Jelölése: $A \cup B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 9\}$.

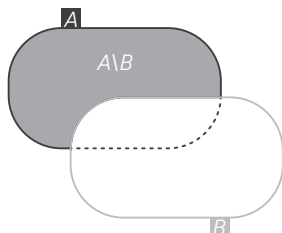
Az unió művelet legfontosabb tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges A , B és C halmazokra:

- ▶ $A \cup \emptyset = A$,
- ▶ $A \cup A = A$,
- ▶ $A \cup B = B \cup A$ (azaz a művelet kommutatív),

- ▶ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (azaz a művelet asszociatív),
- ▶ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, (az unió a metszetre nézve disztributív),
- ▶ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, (a metszet az unióra nézve disztributív).

Definíció: Az A és B halmazok különbsége azoknak, és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A -nak elemei, de B -nek nem elemei. Jelölése: $A \setminus B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \setminus B = \{4; 5\}$ és $B \setminus A = \{6; 9\}$.

A különbség tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges A halmazra:

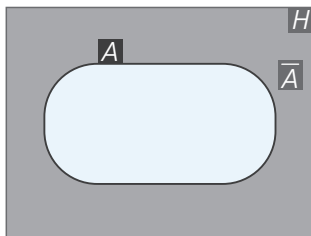
- ▶ $A \setminus A = \emptyset$,
- ▶ $A \setminus \emptyset = A$,
- ▶ $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

Megjegyzés: A különbség művelet nem kommutatív és nem asszociatív.

A legtöbb feladatban adott (vagy adottnak tekintünk) egy olyan halmazt, amelynek minden vizsgált halmaz részhalmaza. Ezt a halmazt *alaphalmaznak* vagy *univerzumnak* nevezzük.

Definíció: Legyen H az univerzum (alaphalmaz), és ennek A valamely részhalmaza! Az A *komplementer halmaza* (vagy *kiegészítő halmaza*) H azon elemeinek halmaza, melyek A -nak nem elemei. Jele: \bar{A} .

$$\bar{A} = H \setminus A$$



Példa: $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és az $A = \{2; 3\}$ esetén $\bar{A} = \{4; 5\}$.

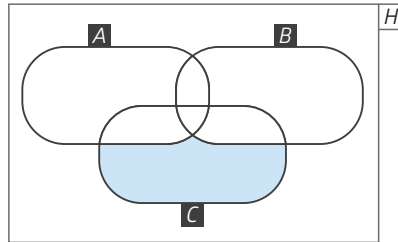
A komplementer művelet tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges H alaphalmaz és $A \subseteq H$ halmaz esetén:

- ▶ $\overline{\overline{H}} = \emptyset$,
- ▶ $\overline{\emptyset} = H$,
- ▶ $\overline{\overline{A}} = A$.

Feladat (I.): Mely halmazművelet eredményét jelöltük az ábrán?

(2 pont)



✓ **Megoldás:**

A jelölt tartomány: $C \setminus (A \cup B)$.

Bármely más helyes megoldás is elfogadható.

2 pont

Intervallumok

Az *intervallumok* a valós számok összefüggő részhalmazai. A számegyenesen egy szakaszt vagy félegyenest határoznak meg. Attól függően, hogy az egyes végpontok hozzátartoznak-e az intervallumhoz, adott oldalról nyitott, illetve zárt intervallumról beszélünk.

Definíció: Az $[a; b]$ *balról és jobbról zárt intervallum* az a -nál nagyobb vagy egyenlő és b -nél kisebb vagy egyenlő valós számokat jelöli. Vagyis $[a; b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$.



Definíció: Az $]a; b]$ *balról nyitott és jobbról zárt intervallum* az a -nál nagyobb és a b -nél kisebb vagy egyenlő valós számokat jelöli. Vagyis $]a; b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$.



Definíció: Az $[a; b[$ *balról zárt és jobbról nyitott intervallum* az a -nál nagyobb vagy egyenlő és a b -nél kisebb valós számokat jelöli. Vagyis $[a; b[= \{x | a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$.



Definíció: Az $]a; b[$ *balról és jobbról nyitott intervallum* az a -nál nagyobb és a b -nél kisebb valós számokat jelöli. Vagyis $]a; b[= \{x | a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$.



Példaként definiálunk egy intervallumot, mely a számegyenes egy félegyenesét határozza meg.

Definíció: Az $[a; \infty[$ intervallum jelöli valamennyi a -nál nagyobb vagy egyenlő számot. (Az intervallum a $\infty / -\infty$ -nél mindig nyitott.) Vagyis $[a; \infty[= \{x | a \leq x, x \in \mathbb{R}\}$.



Feladat (II./B): Jelölje A a $2x+3 < 25-2x$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát, B pedig a $-x^2-8+9x \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

- a) Határozza meg az A és B halmazokat, és ábrázolja őket közös számegyenesen! **(6 pont)**
- b) Határozza meg az $A \cup B$, $B \cap A$ és $B \setminus A$ halmazokat! **(6 pont)**
- c) Hány elemű az $(A \cup B) \cap C$ halmaz, ha C a pozitív prímszámok halmaza? **(4 pont)**

✓ **Megoldás:**

| | | |
|--|--|---------------|
| a) | | |
| A $2x+3 < 25-2x$ egyenlőtlenséget átrendezve, $4x < 22$ adódik, ahonnan $x < 5,5$. | | 1 pont |
| Ekkor $A =]-\infty; 5,5[$. | | 1 pont |
| Felírva a $-x^2-8+9x \geq 0$ egyenlőtlenséghez tartozó másodfokú egyenletet $-x^2+9x-8=0$ adódik. Ennek gyökei: $x_1=1$, és $x_2=8$. | | 1 pont |
| Felrajzolva az egyenlet bal oldalán található másodfokú függvény grafikonját, leolvasható az egyenlőtlenség megoldáshalmaza. | | 1 pont |
| <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> | | |
| Innen $B = [1; 8]$. | | 1 pont |
| Az intervallumok közös számegyenesen: | | 1 pont |
| Összesen: | | 6 pont |

b)

$$A \cup B =]-\infty; 8],$$

A pontszám nem bontható.

2 pont

$$B \cap A = [1; 5,5[,$$

A pontszám nem bontható.

2 pont

$$B \setminus A = [5,5; 8].$$

A pontszám nem bontható.

2 pont

Összesen:**6 pont**

c)

$$\text{Mivel } (A \cup B) \cap C = \{2; 3; 5; 7\},$$

A pontszám nem bontható.

2 pont

így az $(A \cup B) \cap C$ halmaznak 4 eleme van.

A pontszám nem bontható.

2 pont

Összesen:**4 pont**

Logikai szita

Tétel: Bármely két, A és B (véges) halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, valamint tetszőleges A , B és C (véges) halmazok esetén:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Feladat (II./A): Egy iskola 9. évfolyamán idegen nyelvként angol vagy német választható. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet: németül 90-en, angolul 130-an, angolul és németül is 50-en tanulnak. Hányan járnak a 9. évfolyamra? **(6 pont)**

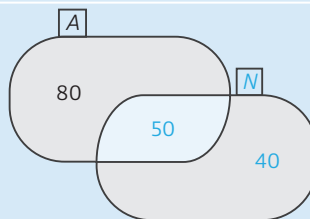
✓ Megoldás:

Legyen A azoknak a halmaza, akik tanulnak angolul, N pedig azoké, akik tanulnak németül!

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

1 pont

Készítsünk a feladathoz Venn-diagramot! Ekkor $|A| = 130$, $|N| = 90$, $|A \cap N| = 50$, keressük $|A \cup N|$ értékét!



2 pont

A logikai szita szerint: $|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N| = 130 + 90 - 50 = 170$.

2 pont

A 9. évfolyamra 170 fő jár.

1 pont

Összesen:**6 pont**

Ponthalmazok

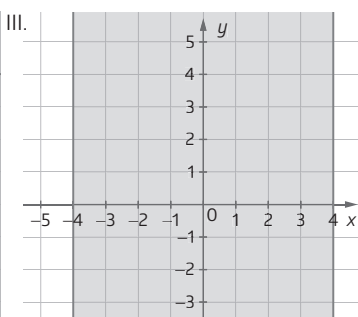
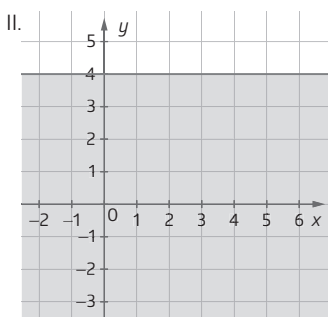
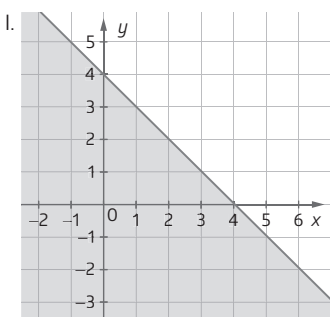
Ponthalmazok a koordináta-rendszerben

Feladat (I.): Párosítsa az alábbiakban megadott, illetve a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt ponthalmazokat! (2 pont)

$$A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y \leq 4\}$$

$$B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 4\}$$

$$C = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq 4\}$$



✓ **Megoldás:**

A – II. B – I. C – III.

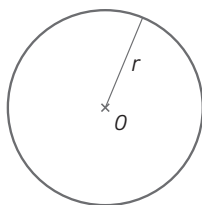
2 pont

Nevezetes ponthalmazok

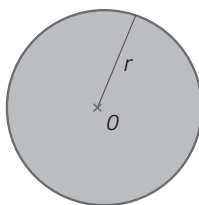
Definíció: A *kör* (körvonal) azon pontok halmaza a síkban, melyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő (nem nulla) távolságra vannak. A kör középpontját a körvonal valamely pontjával összekötő szakasz a kör sugara.

Definíció: A (zárt) *körlap* egy adott ponttól (a középponttól) egy adott távolságnál (a sugárnál) kisebb vagy egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon.

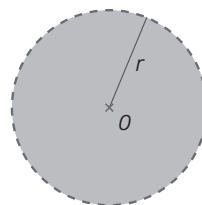
Definíció: A *nyílt körlap* egy adott ponttól (a középponttól) egy adott távolságnál (a sugárnál) kisebb távolságra lévő pontok halmaza a síkon.



Kör(vonal)



Zárt körlap

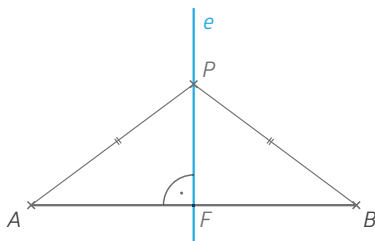


Nyílt körlap

Definíció: A szakasz felezőpontján áthaladó, a szakaszra merőleges egyenest *szakaszfelező merőlegesnek* nevezzük.

Tétel: A szakaszfelező merőleges pontjainak halmaza megegyezik a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra, a szakasz síkjában lévő pontok halmazával.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy ha egy pont illeszkedik egy szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére, akkor az a végpontoktól egyenlő távolságra van, illetve, ha egy pont egyenlő távolságra van egy szakasz két végpontjától, akkor az illeszkedik a szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére.

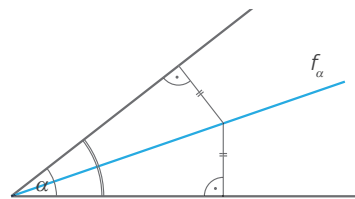


A szakaszfelező merőleges egyenes pontjai egyenlő távolságra vannak a szakasz két végpontjától.

Definíció: A *szögfelező* a szöget két egyenlő részre osztó félegyenes, melynek kezdőpontja a szög csúcsa.

Tétel: Egy konvex szög szögfelezője pontjainak halmaza megegyezik a szög két szárától egyenlő távolságra, a szög tartományában lévő pontok halmazával.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy ha egy pont illeszkedik egy szög szögfelező félegyenesére, akkor az a pont egyenlő távolságra van a szög két szárától, illetve, ha egy konvex szögtartományban egy pont egyenlő távolságra van a két szárától, akkor az a pont illeszkedik a szög szögfelező félegyenesére.



A szögfelező félegyenes pontjai egyenlő távol vannak a szög két szárától.

Feladat (II./A): Adott a koordináta-rendszerben az $A(3; 2)$ és a $B(-5; 6)$ pont. Határozza meg, hogy a $-3x + 4y = 14$ egyenletű egyenes mely pontja van egyenlő távolságra az A és B pontoktól! **(11 pont)**

✓ **Megoldás:**

Az A és B pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére.

1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái: $F\left(\frac{3+(-5)}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = F(-1; 4)$.

1 pont

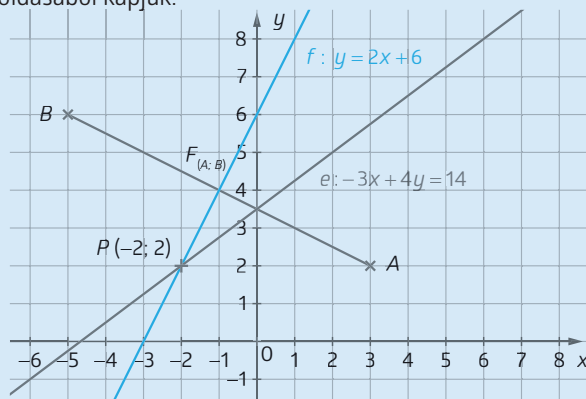
Az AB szakasz egyenesének meredeksége (a koordinátákból számolva) $m = \frac{6-2}{-5-3} = -\frac{1}{2}$. 1 pont

Ekkor az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenesének meredekségére:
 $m_f \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, vagyis $m_f = 2$. 1 pont

Az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére
 $2 \cdot (-1) + b = 4$. Innen $b = 6$. 1 pont

Az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére
 $f: y = 2x + 6$. 1 pont

A keresett pont koordinátáit az e és f egyenesek egyenletéből álló lineáris egyenletrendszer megoldásából kapjuk.



Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$\begin{cases} -3x + 4y = 14 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \quad 1 \text{ pont}$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $-3x + 4(2x + 6) = 14$ adódik.

$24 + 5x = 14$, innen pedig $x = -2$. 1 pont

Ekkor $y = 6 + 2 \cdot (-2) = 2$. 1 pont

A keresett pont: $P(-2; 2)$. 1 pont

Összesen: 11 pont

| | |
|--|------------|
| Bevezető | 5 |
| Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok | 6 |
| Halmazok | 6 |
| Matematikai logika | 17 |
| Kombinatorika | 21 |
| Gráfok | 26 |
| Algebra és számelmélet | 31 |
| Betűs kifejezések, nevezetes azonosságok | 31 |
| Hatvány, gyök, logaritmus | 36 |
| Egyenletek | 43 |
| Egyenlőtlenségek | 53 |
| Egyenletrendszerek, egyenlőtlenség-rendszerek | 55 |
| Számelmélet | 59 |
| Számrendszerek | 64 |
| Függvények, sorozatok | 66 |
| Függvények | 66 |
| Sorozatok | 81 |
| Geometria, trigonometria, koordináta-geometria | 88 |
| Geometriai alapok | 88 |
| Tételek kölcsönös helyzete, hajlásszöge, távolsága | 98 |
| Geometriai transzformációk | 105 |
| Síkbeli alakzatok, terület- és kerületszámítás | 116 |
| Térbeli alakzatok, térfogat- és felszínszámítás | 150 |
| Trigonometria | 163 |
| Koordináta-geometria | 169 |
| Valószínűségszámítás, statisztika | 175 |
| Leíró statisztika | 175 |
| A valószínűségszámítás elemei | 186 |
| Tárgymutató | 194 |