

## 1. FELADATSOR

## I. RÉSZ

1.

a) Oldja meg a valós számok halmazán a  $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$  egyenletet!.....(7 PONT)

b) Igazolja, hogy ha  $\alpha$  hegyesszög, akkor  $\cos^2 \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  egy mértani sorozat három egymást követő tagja!..... (4 PONT)



11 PONT

2. Egy rombusz egyik átlója 20 cm, beírható körének sugara 6 cm.

a) Határozza meg a rombusz területét! ..... (9 PONT)

b) Határozza meg a rombusz hegyesszögeinek nagyságát! ..... (3 PONT)



12 PONT

3.

a) Határozza meg annak a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely az 1 helyen a 0, a 3 helyen a 26, a  $-2$  helyen a  $-9$  értéket veszi fel! ..... (11 PONT)

b) Határozza meg az  $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$  függvény grafikonjának 3 és  $-2$  abszcisszájú pontjain áthaladó szelő egyenletét! ..... (3 PONT)



14 PONT

4. Egy országban a vezetékes telefonszámok ötjegyű pozitív egész számok. Azokat a telefonszámokat, melyek csupa különböző számjegyből állnak, nem adják ki, állami célra tartják fenn őket.

a) Hány állami telefonszám lehetséges? ..... (3 PONT)

b) Az összes telefonszám közül egyet véletlenszerűen választva, mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott telefonszámban a számjegyek szorzata páros? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg. .... (5 PONT)

c) Egy újonnan alakult, mobilszolgáltatást kínáló telefontársaság becslése szerint az előfizetők száma az  $e(t) = 30000 \cdot 1,03^{0,5n \cdot t + 2}$  képlet szerint alakul, ahol  $t$  a 2022. októbere óta eltelt hónapok száma, valamint  $n$  állandó. Határozza meg az  $n$  egész paraméter értékét, ha tudjuk, hogy a fenti becslés szerint az előfizetők száma 2026 januárjára éri el az egymilliót. .... (6 PONT)



14 PONT

## II. RÉSZ

5. Egy cég olyan tömör, csonka kúp alakú macskatálat készít, melyeket fölülről egy olyan félgömbbel mélyítettek ki, melynek főköre egybeesik a csonka kúp fedőkörével. A fedőkör sugara 12 cm. A macskatál magassága 13 cm. Az alkotók az alaplap síkjával  $70^\circ$ -os szöveget zárnak be.

a) Határozza meg a macskatál elkészítéséhez szükséges anyag térfogatát és a macskatál felszínét! ..... (13 PONT)

b) Nagytestű macskák számára ugyanez a cég kétszer ekkora térfogatú (a kicsihez hasonló) tálat is készít. Mekkora a csonka kúp fedőkörének sugara a nagytestű macskáknak készült tál esetén? ..... (3 PONT)



16 PONT

6. Egy szabályos pénzérmét 10-szer feldobtunk.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább annyi írást dobtunk, mint fejet? ... (5 PONT)

b) Hányféleképp lehetséges, hogy a dobott fejek és írások száma is prímszám? ..... (4 PONT)

c) Egy speciális, gyűjtői célra megjelentetett limitált kiadású pénzérme formája olyan henger, amelyben a magasság és az átmérő összege 30 mm. Hogyan válasszák meg a gyártás során az érme sugarának hosszát, hogy az érme térfogata maximális legyen? ..... (7 PONT)



16 PONT

7.

a) Tekintsük a valós számok lehető legbővebb részalmazán értelmezett  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$  függvényt! Adja meg az  $f(x)$  derivált függvényét! ..... (4 PONT)

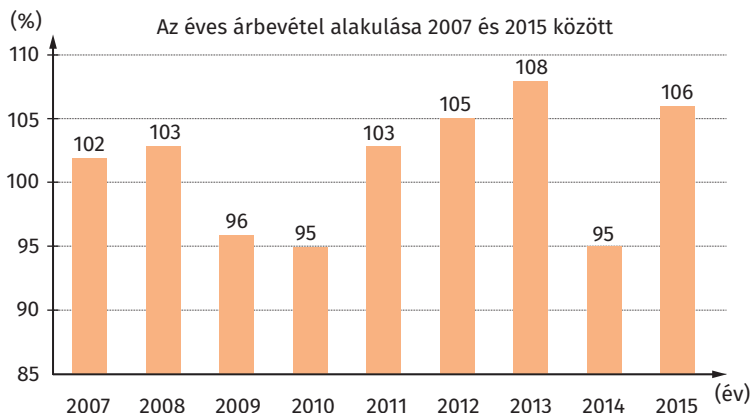
b) Mely  $x$  egész értékek esetén lesz az  $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$  kifejezés értéke egész? (8 PONT)

c) Oldja meg a pozitív valós számokalmazán az  $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 1$  egyenlőtlenséget! ..... (4 PONT)



16 PONT

8. Egy vállalat elmúlt 2007 és 2015 közötti nettó árbevételének alakulását a következő oszlopdiagram mutatja.



Az oszlopdiagramon ábrázolt százalékos értékek az előző évhez viszonyított változást jelentik. (Pl.: a 2011-es év 103%-os értéke azt jelenti, hogy a 2011-es árbevétel a 2010-es árbevétel 103%-a.) A 2010-es árbevétel 8 millió forint volt.

- a) Mekkora volt az árbevétel 2015-ben? Válaszát 1000 forintra kerekítve adja meg! ..... (3 PONT)
- b) Hány százalék volt a 2006. évihez viszonyított átlagos nettó árbevétel változás 2007 és 2009 között? ..... (3 PONT)
- c) A vállalatot hitelező bank havi 1,5%-os fix kamatozású hitelt kínál. Hitelt fölvenni csak hónap elején lehet, s az állandó havi törlesztőrészletet is a hónap elején kell fizetnünk, az első részletet a hitel felvétele után egy hónappal. A kamatot a bank mindig a hónap végén írja jóvá. Ákos 10 millió forint hitelt vesz fel. Vállalja, hogy tartozását 10 év alatt, 120 részletet fizetve törleszti. Mennyi Ákos havi törlesztőrészlete száz forintra kerekítve? (Minden egyéb banki költségtől eltekintünk.) ..... (10 PONT)



16 PONT

9. Egy kisvárosi zeneiskolában három hangszeren tanulnak a diákok. Zongorázni 32-en, klarinétozni 17-en, és furulyázni is 32-en tanulnak. Zongorázni és klarinétozni 9-en, klarinétozni és furulyázni 12-en tanulnak. Pontosan két hangszerrel háromszor annyian ismerkednek, mint három hangszerrel.

- a) Mennyivel vannak azok többen, akik nem furulyáznak, mint azok, akik csak furulyán tanulnak? ..... (7 PONT)
- b) Igazolja, hogy a zeneiskolában tanuló diákok száma nem lehet ötten osztható! ..... (2 PONT)

c) A zeneiskola 100 éves jubileuma alkalmából koncertet ad. A koncertre három árkategóriában árulnak jegyeket. Az első árkategória jegyei a földszintre szólnak. Itt a 15 sorból álló trapéz alakú nézőtér első sorában 10 hely van, majd minden további sorban eggyel több, mint az azt megelőzőben. A második árkategória jegyei az első emeletre szólnak. Itt a nézőtér téglalap alakú, melynek 10 sora van, soronként 15 hellyel. A harmadik árkategória jegyei a páholyokba szólnak. A 8 páholy mindegyikében 4 hely van. Egy első árkategóriás jegy ára 4000 Ft. A második árkategória jegyei ehhez képest 20%-kal drágábbak, egy harmadik árkategóriás jegy ára pedig egy második árkategóriás jegy árának 130%-a. A koncertre minden jegy elkelt. Mennyibe került átlagosan egy jegy a koncertre? .....(7 PONT)



16 PONT

## 1. FELADATSOR

1.

a) A  $\operatorname{tg} x$  értelmezése miatt:  $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$ .

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1 PONT

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

1 PONT

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ vagy } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1 PONT

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

1 PONT

$$\text{vagy } x = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}, x = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

1 PONT

A kapott értékek megfelelnek a kezdeti kikötésünknek.

1 PONT

**Összesen:**

7 PONT

b) Ha  $\alpha$  hegyesszög, akkor mindhárom kifejezés értelmezett és pozitív (egyik sem nulla).

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

A harmadik és a második tag hányadosa  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$

1 PONT\*

Ez megegyezik a második és az első tag (ebben a sorrendben vett) hányadosával.

1 PONT\*

Mivel az egymást követő tagok hányadosa megegyezik (állandó), a három érték mértani sorozatot alkot.

1 PONT\*

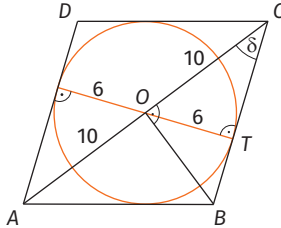
**Összesen:**

4 PONT

\* Megjegyzés: Ezeket a pontokat akkor is kapja meg, ha belátja, hogy az első és harmadik tag szorzata a középső tag négyzetével egyenlő.

2.

a) Helyes ábra készítése az adatok feltüntetésével, melyről kiderül, hogy a beírható kör sugara az  $OBC$  háromszög magassága és/vagy a beírható kör átérője a rombusz magassága.



1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az  $OTC$  derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel szerint

$$CT = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

Az  $OBC$  derékszögű háromszögből a magasságtétel szerint

$$6 = \sqrt{TB \cdot 8},$$

1 PONT

$$TB = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \text{ (cm)},$$

1 PONT

$$a = BT + TC = 12,5 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

### 1. megoldás

Az  $OBC$  derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel szerint

1 PONT

$$OB = \sqrt{12,5^2 - 10^2},$$

$$OB = 7,5 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

$$T = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A rombusz területe:  $150 \text{ cm}^2$ .

1 PONT

### 2. megoldás

$$T_{\text{rombusz}} = 4T_{OBC\Delta}$$

(1 PONT)

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$T_{OBC\Delta} = \frac{BC \cdot OT}{2} \quad (1 \text{ PONT})$$

$$T_{OBC\Delta} = \frac{12,5 \cdot 6}{2} = 37,5 \text{ (cm}^2\text{)} \quad (1 \text{ PONT})$$

A rombusz területe:  $150 \text{ cm}^2$ . (1 PONT)

**Összesen:** **9 PONT**

**b)** Az  $OTC$  derékszögű háromszögben:  $\sin \delta = \frac{6}{10}$ . 1 PONT

$\delta \approx 36,87^\circ$ . 1 PONT

A keresett szög:  $73,74^\circ$ . 1 PONT

**Összesen:** **3 PONT**

### 3.

**a)** A másodfokú függvény hozzárendelési szabályának általános alakja:  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ). 1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

A feladat szövegéből adódóan:  $f(1) = 0$ ;  $f(3) = 26$ ;  $f(-2) = -9$ . 1 PONT

Az  $1, 3, -2$  értékeket a függvény hozzárendelési szabályába beírva, és a kapott kifejezéseket az adott helyen felvett értékkel egyenlővé téve az

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 26 \\ 4a - 2b + c = -9 \end{cases} \quad (3 \text{ PONT})$$

egyenletrendszert kapjuk.

Innen  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = -7$ . 5 PONT

A keresett függvény hozzárendelési szabálya:  $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$ . 1 PONT

**Összesen:** **11 PONT**

**b)** Az  $A(3; 26)$  és  $B(-2; -9)$  pontokon átmenő egyenes egy irányvektora az  $\vec{AB}$ . 1 PONT

$\vec{AB}(-5; -35)$ . 1 PONT

A szelő egyenlete:  $-35x + 5y = 25 \Rightarrow -7x + y = 5$ .

1 PONT

**Összesen:**

3 PONT

4.

a) Az első számjegy nem lehet nulla, így csak 9 lehetőség közül választhatunk. A második helyre ismét kilenc lehetőség közül választhatunk. (A 0 már lehet, de az első helyre beírt szám nem.) A harmadik helyre 8, a negyedik helyre 7, az ötödik helyre 6 féleképpen választhatunk számot, mivel a számjegyek nem ismétlődhetnek.

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Mivel az egyes választások egymástól függetlenek (például bármit is választottunk a második helyre, minden választásunk esetén 8-8 lehetőségünk van a harmadik számjegy megválasztására), a lehetőségeket össze kell szorozni.

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Az állami telefonszámok száma:  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$ .

1 PONT

**Összesen:**

3 PONT

b) Az összes lehetséges telefonszámok száma:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90000.$$

1 PONT

Egész számok szorzata pontosan akkor páros, ha legalább az egyik tényező páros.

1 PONT

Olyan telefonszámból, amelyben minden jegy páratlan,  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$  van.

1 PONT

(A komplementer-leszámlálás módszerét használva) az összes lehetőségek számából vonjuk ki azoknak az eseteknek a számát, amikor a számok szorzata páratlan. A lehetőségek száma:  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 5^5 = 86875$ .

1 PONT

A keresett valószínűség:  $p = \frac{86875}{90000} \approx 0,965$ .

1 PONT

**Összesen:**

5 PONT

c) 2026 januárjáig 39 hónap telik el.

1 PONT

$$1\,000\,000 = 30\,000 \cdot 1,03^{19,5n+2}.$$

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Mivel a  $\lg x$  függvény szigorúan monoton (növe)  $\lg \frac{1\,000\,000}{30\,000} = \lg 1,03^{19,5n+2}$ , 1 PONT

Szigorú monotonitás helyett hivatkozhat a függvény kölcsönösen egyértelmű (invertálható) voltára is.

$$19,5 \cdot n + 2 = \frac{\lg \frac{1\,000\,000}{30\,000}}{\lg 1,03} \approx 118,63, \quad \text{1 PONT}$$

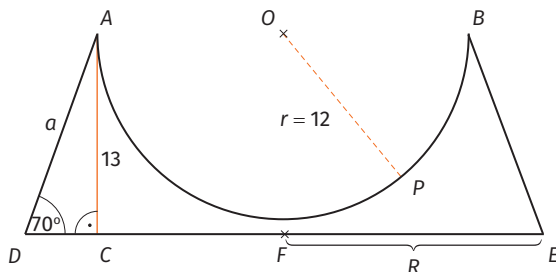
$n \approx 5,98$ . 1 PONT

Az  $n$  egész paraméterre:  $n = 6$ . 1 PONT

**Összesen:** **6 PONT**

**5.**

a) Ábra az adatok feltüntetésével:



1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A macskatál térfogatát a csonka kúp és a félgömb térfogatának különbsége adja. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$V_{\text{félgömb}} = \frac{4r^3\pi}{6} = 1152\pi \approx 3619,11 \text{ (cm}^3\text{)}. \quad \text{1 PONT}$$

A csonka kúp térfogatának kiszámításához szükségünk van a csonka kúp alapkörének sugarára. Ez az ábrán látható ADC derékszögű háromszög segítségével kapható meg. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$\text{tg } \alpha = \frac{m}{R-r}, \quad \text{tg } 70^\circ = \frac{13}{R-12}, \quad R = \frac{13}{\text{tg } 70^\circ} + 12 \approx 16,73 \text{ (cm)}. \quad \text{2 PONT}$$

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{(R^2 + Rr + r^2)m\pi}{3} \approx 8504,75 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2 PONT

$$\text{A macskatál térfogata: } V_{\text{macskatál}} = 8504,75 - 3619,11 = 4885,64 \text{ cm}^3.$$

1 PONT

A macskatál felszíne a csonka kúp fedőkör nélküli felszínének és a félgömb felszínének összege.

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

$$\text{A csonka kúp alkotója: } a = \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{13}{\sin 70^\circ} \approx 13,83 \text{ (cm)}.$$

2 PONT

$$A_{\text{macskatál}} = R^2\pi + (R+r)a\pi + 2r^2\pi = 3032,35 \text{ cm}^2.$$

1 PONT

**Összesen:****13 PONT**

**b)** Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlósági arány abszolút értékének köbe. (Jelen esetben számolhatunk pozitív arányú hasonlósággal.)

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Így  $\frac{V'}{V} = 2 = \tau^3$ , ahol  $\tau$  a hasonlósági arány. Így  $\frac{r'}{r} = \sqrt[3]{2}$ , ahol  $r'$  a nagy macskatál fedőkörének sugara.

1 PONT

A nagy macskatál fedőkörének sugara:  $r' = \sqrt[3]{2} \cdot r = \sqrt[3]{2} \cdot 12 \approx 15,12 \text{ cm}.$

1 PONT

**Összesen:****3 PONT****6.**

**a)** Mivel az egyes dobások kimenetele egymástól független, és minden egyes dobásnak két lehetséges kimenetele van, ezért az összes esetek száma  $2^{10}$ .

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Ha az írások száma legalább annyi, mint a fejeké, akkor az lehet 10, 9, 8, 7, 6 vagy 5.

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Ezek rendre  $\binom{10}{10}, \binom{10}{9}, \binom{10}{8}, \binom{10}{7}, \binom{10}{6}, \binom{10}{5}$  módon lehetségesek. (Hiszen ki kell választanunk a 10 dobás közül melyik lesz az a 10, 9... stb. számú, amelyik írás lesz.) 1 PONT

Más megközelítéssel a kedvező dobássorozatok száma rendre  $\frac{10!}{10!0!}, \frac{10!}{9!1!}, \frac{10!}{8!2!}, \frac{10!}{7!3!}, \frac{10!}{6!4!}$ , mert ennyiféle módon lehet sorba rendezni 10 I és 0 F, illetve 9 I és 1 F jelet, s.í.t.

$$p = \frac{\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \binom{10}{6} + \binom{10}{5}}{2^{10}}. \quad (1 \text{ PONT})$$

A keresett valószínűség:  $p = \frac{638}{2^{10}} \approx 0,623$ . (1 PONT)

**Összesen:** 5 PONT

**b)** (A 10-et kell két prímszám összegeként előállítani.) A 3 + 7, 5 + 5 esetek lehetségesek. 1 PONT

Dobhatunk 3 fejet és 7 írást, vagy fordítva, illetve 5 fejet és 5 írást. 1 PONT

$$2 \binom{10}{7} + \binom{10}{5} \text{ -féleképp lehetséges.} \quad (1 \text{ PONT})$$

A lehetőségek száma 492. 1 PONT

**Összesen:** 4 PONT

**c)**  $m + 2r = 30, m = 30 - 2r$ . 1 PONT

A henger térfogata:  $V = r^2 \pi m = r^2 \pi (30 - 2r) = (30r^2 - 2r^3) \pi$ . 1 PONT

$$V'(r) = (60r - 6r^2) \pi. \quad (1 \text{ PONT})$$

Egy (differenciálható) függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. 1 PONT

$$(60r - 6r^2) \pi = 0 \text{ egyenlet pozitív megoldása } r = 10. \quad (1 \text{ PONT})$$

(Azt, hogy van-e szélsőérték, és ha van, akkor minimum vagy maximum, az első derivált előjelvizsgálatával dönthető el.)

	$0 < r < 10$	$r = 10$	$r > 10$ ( $r < 15$ )	
$V'(r)$	pozitív	0	negatív	1 PONT
$V(r)$	szigorúan monoton növekvő	helyi maximuma van	szigorúan monoton csökkenő	

$V''(r) = (60 - 12r)\pi$  és mivel  $V''(10) < 0$ , ezért a  $V(r)$  függvénynek az  $r = 10$  helyen helyi maximuma van.

Az érme sugarát 10 cm-nek kell választani ahhoz, hogy az érme térfogata maximális legyen. 1 PONT

**Összesen:** 7 PONT

7.

a) A számláló deriváltja:  $2x + 4$ . 1 PONT

A nevező deriváltja:  $2x + 3$ . 1 PONT

A hányados függvény deriválási szabálya alapján  $f(x)$  derivált függvénye:

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2+3x+2) - (2x+3)(x^2+4x+3)}{(x^2+3x+2)^2}. \quad 2 \text{ PONT}$$

**Összesen:** 4 PONT

b) A számlálóban és a nevezőben található másodfokú kifejezéseket szorzattá alakítva:  $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$ ,  $x \neq -1, -2$  adódik. 3 PONT

Szorozatonként 1-1 pont jár, illetve 1 pont a helyes egyszerűsítésért.

Ez a kifejezés  $\frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$  alakban írható. 1 PONT

Ez a kifejezés pontosan akkor egész, ha  $x+2 \mid 1$ . 1 PONT

Ez két esetben lehetséges, ha  $x+2 = 1$ , vagy  $x+2 = -1$ . 1 PONT

$x = -1, -3$ . 1 PONT

Az  $x = -1$  nem eleme az eredeti kifejezés értelmezési tartományának, így  $x = -3$  az egyetlen megoldás. 1 PONT

**Összesen:** 8 PONT

c) Ha  $x$  pozitív, akkor  $x^2 + 3x + 2 > 0$ , így beszorozhatjuk vele az egyenlőtlenség mindkét oldalát, a relációjel iránya nem változik. 1 PONT

A beszorzás után  $x^2 + 4x + 3 > x^2 + 3x + 2$  adódik. 1 PONT

$x > -1$  1 PONT

A pozitív valós számok halmazán a megoldás:  $x > 0$ . 1 PONT

**Összesen:** 4 PONT

## 8.

a) A 2015-ös árbevétel: 3 PONT  
 $8 \cdot 10^6 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 0,95 \cdot 1,06 = 9\,409\,569,1 \approx 9\,410\,000$  Ft.

**Összesen:** 3 PONT

b) A változások százalékos mértéke 2%, ( $1,02 \cdot 1,03 = 1,0506$ ) 5,06% és ( $1,02 \cdot 1,03 \cdot 0,96 = 1,008576$ ) 0,8576%. 2 PONT

Az átlagos változás  $\frac{2 + 5,06 + 0,8576}{3} \approx 2,64\%$  volt. 1 PONT

**Összesen:** 3 PONT

c) Az első hónap végén  $10^7 \cdot 1,015$  forint tartozásunk van. 1 PONT

A havi törlesztőrészletet  $x$ -szel jelölve az első hónap végén hitelállományunk  $10^7 \cdot 1,015 - x$  forintra csökken. 1 PONT

A második hónap elején  $(10^7 \cdot 1,015 - x) \cdot 1,015$  forinttal, míg a második hónap végén  $(10^7 \cdot 1,015 - x) \cdot 1,015 - x$  forinttal tartozunk. 1 PONT

A 10 év alatt fizetett 120 törlesztőrészlet befizetése után nincs tartozásunk, vagyis  $(\dots((10^7 \cdot 1,015 - x) \cdot 1,015 - x) \cdot 1,015 - x \dots) \cdot 1,015 - x = 0$ . 1 PONT

A zárójeleket felbontva  $10^7 \cdot 1,015^{120} - x \cdot 1,015^{119} - x \cdot 1,015^{118} - \dots - x \cdot 1,015 - x = 0$  adódik. 1 PONT

$10^7 \cdot 1,015^{120} = x(1,015^{119} + 1,015^{118} + \dots + 1,015 + 1)$ . 1 PONT

A jobb oldalon egy  $a_1 = 1$  kezdőtagú,  $q = 1,015$  hányadosú mértani sorozat első 120 tagjának összege áll. 1 PONT

így  $10^7 \cdot 1,015^{120} = x \cdot 1 \cdot \frac{1,015^{120} - 1}{1,015 - 1}$ . 1 PONT

$x \approx 180\,185,199$  1 PONT

Ákos havi törlesztőrészlete 180 200 forint.

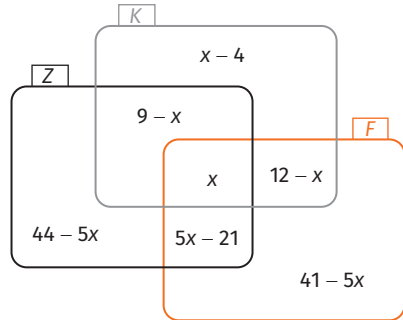
1 PONT

**Összesen:**

**10 PONT**

**9.**

a) Készítsünk halmazábrát, s jelöljük  $x$ -szel a három hangszeren tanulók számát! Jelölje  $Z$  a zeneiskola zongorázó,  $K$  a klarinétozó,  $F$  a furulyázó diákjait! Az ábrán az egyes részek elemeinek számát tüntessük fel!



4 PONT

Helyesen kitöltött tartományonként 1-1 pont jár.

Az ábráról leolvasva, azok száma, akik nem furulyáznak

$$|\bar{F}| = 44 - 5x + 9 - x + x - 4 = 49 - 5x.$$

1 PONT

Az ábráról leolvasva, azok száma, akik csak furulyán tanulnak

$$|F \setminus (Z \cup K)| = 41 - 5x.$$

1 PONT

Azok száma, akik nem furulyáznak, 8-cal több, mint azok száma, akik csak furulyán tanulnak.

1 PONT

**Összesen:**

**7 PONT**

b) A diákok száma az ábráról leolvasva:  $|Z \cup K \cup F| = 81 - 5x$ .

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Mivel a 81 nem osztható 5-tel, így a  $81 - 5x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) sem, ezért a diákok száma nem lehet ötten osztható.

1 PONT

**Összesen:**

**2 PONT**

c) A 2. kategória jegyára:  $4000 \cdot 1,2 = 4800\text{Ft}$ .

1 PONT

A 3. kategória jegyára:  $4800 \cdot 1,3 = 6240\text{Ft}$ .

1 PONT

Az 1. kategóriás helyek száma egy  $a_1 = 10$  kezdőtagú,  $d = 1$  differenciájú számtani sorozatot alkot. 1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

Ezen helyek száma  $S_{15} = \frac{2 \cdot 10 + 14 \cdot 1}{2} \cdot 15 = 255$ . 1 PONT

A koncert összbevétele:  $255 \cdot 4000 + 150 \cdot 4800 + 32 \cdot 6240 = 1\,939\,680$  Ft. 1 PONT

A koncertre összesen 437 jegyet adtak el. 1 PONT

Az átlagos jegyár  $\frac{1\,939\,680}{437} \approx 4\,438,63$  Ft volt. 1 PONT

**Összesen:** **7 PONT**